DS n°11 : permutations, déterminants, intégration, dénombrement, probabilités

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées. Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ± 1 point. Certaines questions difficiles méritent d'y passer du temps pour les résoudre. Toute tentative de recherche, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans chaque exercice (sauf l'exercice 4), les questions principales (1, 2, ...) sont indépendantes.

Exercice 1 : limites de suites

1) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^5}{k^3+n^3}$.

2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$$

- **a)** Montrer que la suite (u_n) est monotone et converge vers 0.
- **b)** Montrer qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ que l'on précisera telle que

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad (n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1}g(x)dx$$

  (g est continue mais il n'est pas nécessaire de le justifier)
- **c)** En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$.
Montrer que f est la fonction nulle.
Indication : on pourra considérer une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui tend vers une fonction bien choisie.

Exercice 2 : dénombrement et permutations

Soit $n \geq 2$ un entier. On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$.

1) On pose $\mathcal{P}_n$ (respectivement $\mathcal{I}_n$) l'ensemble des permutations paires (respectivement impaires) de S_n. Enfin, on pose

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_n &\to \mathcal{I}_n \\ \sigma &\mapsto \sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **a)** Montrer que f est bien définie et est une bijection.
- **b)** En déduire les cardinaux de $\mathcal{P}_n$ et de $\mathcal{I}_n$.

2)
- **a)** Quel est le nombre total de transpositions dans S_n ?
- **b)** Quel est le nombre total de 3 cycles dans S_n (avec $n\geq 3$) ? Et de p-cycles (avec $n \geq p \geq 4$) ?

3) Quel est le nombre d'anagrammes de PERMUTATION avec les voyelles dans l'ordre alphabétique ?

4) Combien de permutations de S_n possèdent $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans leur décomposition en produits de cycles à supports disjoints ? Une justification précise est attendue.

Exercice 3 : matrices et déterminants

1) Résoudre l'équation d'inconnues $a, b, c \in \mathbb{R}$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} = 0$

2) Calculer le déterminant suivant de taille n (avec $n \geq 1$) : $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & & & & \\ 2 & 5 & 2 & & \Large 0 & \\ & 2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 2 & \\ & \Large 0 & & 2 & 5 & 2 \\ & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{(n)}$

3) Soit $n \geq 2$ un entier pair et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{com}(X) = A$$

Exercice 4 : le gardien du phare

Le gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de $n \geq 2$ clés, dont une seule convient. Malheureusement, il a oublié quelle était la bonne clé, et essaye les clés les unes après les autres. Le gardien peut se trouver dans deux états :

- Ou bien il est sobre : lorsqu'une clé n'est pas la bonne, le gardien l'écarte pour toutes les tentatives suivantes.
- Ou bien il est ivre : il oublie alors, après chaque tentative, quelle clé il a essayé.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "la porte s'ouvre à la k-ième tentative".

1) Dans cette question, on suppose que le gardien est sobre et on notera $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ sous cette hypothèse. Calculer p_1, puis p_2, et enfin p_k.

2) Dans cette question, on suppose que le gardien est ivre et on notera $q_k = \mathbb{P}(A_k)$ sous cette hypothèse. Calculer q_1, puis q_2, et enfin q_k.

3) On note I l'évènement "le gardien est ivre", de sorte que désormais

$$p_k = \mathbb{P}(A_k \mid \overline{I}) \qquad \text{et} \qquad q_k = \mathbb{P}(A_k \mid I)$$

Le gardien est ivre en moyenne trois jours par semaine. Un jour, le gardien utilise 9 clés. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

Exercice bonus (parce que je ne trouvais pas de blague)

La date d'aujourd'hui, à l'envers, se lit 24/6/8. En utilisant le fait que 2468 divise 4936, 7404 et 9872, montrer, sans le calculer, que le déterminant suivant est un entier divisible par 2468 :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 0 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$